OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia: $3^{|x+1|}-2|3^x-1|=3^x+2$.

(culegere)

2. Ştiind că $A=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1, z\neq -1\}$, demonstraţi că

$f:\mathbb{R}\to A,\quad f(x)=\dfrac{1+xi}{1-xi}$ reprezintă o funcţie bijectivă.

(***)

3. Arătaţi că dacă $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ sunt distincte două câte două astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ şi $|z_1+z_2|=|z_2+z_3|=|z_3+z_1|$ atunci z_1,z_2,z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

(***)

4. Fie x,y,z numere reale strict mai mari ca 1. Demonstraţi inegalitatea: $\log_{yz^2}x+\log_{zx^2}y+\log_{xy^2}z\geq 1$.

(G.M./2013)

Propunător: prof.Mirela Pîrvu – C.N. "Al. I. Cuza "- Focşani

SUCCES!

NOTĂ: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a X-a

Soluţii

1. Se explicitează modulele.

Cazul I: $x\in(-\infty,-1)$. Ecuaţia devine $3^{-x-1}+3^x-4=0$.

Se face substituţia $3^x=t>0$ şi se obţine ecuaţia $3t^2-12t+1=0$ cu soluţiile $t_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{33}}{3}>0$. Cum $\log_3\frac{6-\sqrt{33}}{3}\in(-\infty,-1)$ şi $\log_3\frac{6+\sqrt{33}}{3}\notin(-\infty,-1)$ rezultă că soluţia în acest caz este $S_I=\left\{\log_3\frac{6-\sqrt{33}}{3}\right\}$

Cazul II: $x\in[-1,0)$. Ecuaţia devine $3^{x+1}+3^x-4=0\Leftrightarrow 3^x=1\Leftrightarrow x=0\notin[-1,0)$.

Deci $S_{II}=\varnothing$

Cazul III: $x\in[0,\infty)$. Ecuaţia devine $3^{x+1}-3\cdot 3^x=0\Leftrightarrow 0=0$.

Deci $S_{III}=[0,\infty)$

Soluţia finală este $S=\left\{\log_3\frac{6-\sqrt{33}}{3}\right\}\cup[0,\infty)$

2. Se ştie că f este bijectivă dacă şi numai dacă ecuaţia $f(x)=z, x\in\mathbb{R}$ are soluţie unică pentru orice $z\in A$.

Fie $z\in A$, adică $z\in\mathbb{C}$ *cu* $|z|=1$ *şi* $z\neq -1$.

Din $f(x)=z$ şi $z\neq -1$ se obţine $x=\frac{z-1}{i(z+1)}$

Rămâne de arătat că $x\in\mathbb{R}$.

Se ştie că $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x=\bar{x}$

Se foloseşte că $z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$ şi se calculează

$$x-\bar{x}=\frac{z-1}{i(z+1)}-\frac{\bar{z}-1}{-i\left(\bar{z}+1\right)}=0$$

Se obţine $x=\frac{z-1}{i(z+1)}\in\mathbb{R}$ soluţie unică a ecuaţie $f(x)=z$.

3. Se verifică $|z+z'|^2+|z-z'|^2=2\left(|z|^2+|z'|^2\right), \forall z, z' \in \mathbb{C}$

Se aplică relaţia de mai sus, pe rând, numerelor $z_1 şi z_2$, $z_2 şi z_3$ *respectiv* $z_3 şi z_1$.

Din $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ şi $|z_2+z_3|^2+|z_2-z_3|^2=2\left(|z_2|^2+|z_3|^2\right)$, folosind ipoteza, se obţine $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|$. Analog $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|$

Fie A,B,C imaginile geometrice asociate numerelor complexe z_1, z_2, z_3 distincte două câte două cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|\neq 0$

Se deduce că punctele A,B,C sunt situate pe un cerc având centrul în originea reperului cartezian şi raza $|z_1|>0$

Din $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$ rezultă $AB=BC=CA$, ceea ce arată că triunghiul ABC este echilateral.

4. Se notează $\lg x=a, \lg y=b, \lg z=c$.
Din $x,y,z>1 \Rightarrow a,b,c>0$.
Inegalitatea de demonstrat devine $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1$ (*).
Notând $b+2c=A, c+2a=B, a+2b=C$ se arată că

$\frac{a}{b+2c}=\frac{1}{9}\left(\frac{C}{A}+4\frac{B}{A}-2\right), \frac{b}{c+2a}=\frac{1}{9}\left(\frac{A}{B}+4\frac{C}{B}-2\right), \frac{c}{a+2b}=\frac{1}{9}\left(\frac{B}{C}+4\frac{A}{C}-2\right)$ cu $A,B,C>0$ şi rămâne de demonstrat $\left(\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right)+\left(\frac{B}{C}+\frac{C}{B}\right)+\left(\frac{C}{A}+\frac{A}{C}\right)+3\left(\frac{A}{B}+\frac{B}{C}+\frac{C}{A}\right)-6\geq 9$ (**)

Din inegalitatea mediilor rezultă
$\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\geq 2, \frac{B}{C}+\frac{C}{B}\geq 2, \frac{C}{A}+\frac{A}{C}\geq 2$ *şi* $\frac{A}{B}+\frac{B}{C}+\frac{C}{A}\geq 3$, ceea ce demostrează (**).

Altfel, se aplică inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz:
$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)\geq\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)^2, \forall x_i, y_i \in \mathbb{R}, i\in\{1,2,3\}$
Notând $\sqrt{\frac{a}{b+2c}}=x_1; \sqrt{a(b+2c)}=y_1$ ...
Se obţine $\left(\sum\frac{a}{b+2c}\right)\left(\sum a(b+2c)\right)\geq\left(\sum a\right)^2$ şi rămâne de arătat $\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\geq 1$
Cu $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca \Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$ (adev.) sau din nou CBS.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN
VRANCEA

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-15.02.2014

Clasa a X-a

Bareme

1. Se explicitează modulele 1p

Cazul I: $x\in(-\infty,-1)$. Ecuaţia devine $3^{-x-1}+3^x-4=0$.

Se face substituţia $3^x=t>0$ şi se obţine ecuaţia $3t^2-12t+1=0$ cu soluţiile $t_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{33}}{3}>0$. Cum $\log_3\frac{6-\sqrt{33}}{3}\in(-\infty,-1)$ şi $\log_3\frac{6+\sqrt{33}}{3}\notin(-\infty,-1)$ rezultă că soluţia în acest caz este $S_I=\left\{\log_3\frac{6-\sqrt{33}}{3}\right\}$.....3p

Cazul II: $x\in[-1,0)$. Ecuaţia devine $3^{x+1}+3^x-4=0\Leftrightarrow 3^x=1\Leftrightarrow x=0\notin[-1,0)$.

Deci $S_{II}=\varnothing$.....1p

Cazul III: $x\in[0,\infty)$. Ecuaţia devine $3^{x+1}-3\cdot 3^x=0\Leftrightarrow 0=0$.

Deci $S_{III}=[0,\infty)$.....1p

Soluţia finală este $S=\left\{\log_3\frac{6-\sqrt{33}}{3}\right\}\cup[0,\infty)$.....1p

2. Se ştie că f este bijectivă dacă şi numai dacă ecuaţia $f(x)=z, x\in\mathbb{R}$ are soluţie unică pentru orice $z\in A$.....1p

Fie $z\in A$, adică $z\in\mathbb{C}$ *cu* $|z|=1$ *şi* $z\neq -1$.

Din $f(x)=z$ şi $z\neq -1$ se obţine $x=\frac{z-1}{i(z+1)}$.....2p

Rămâne de arătat că $x\in\mathbb{R}$.

Se ştie că $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x=\bar{x}$.....1p

Se foloseşte că $z\cdot\bar{z}=|z|^2=1$ şi se calculează

$$x-\bar{x}=\frac{z-1}{i(z+1)}-\frac{\bar{z}-1}{-i\left(\bar{z}+1\right)}=0$$.....2p

Se obţine $x=\frac{z-1}{i(z+1)}\in\mathbb{R}$ soluţie unică a ecuaţie $f(x)=z$ ...1p

Altfel, f injectivă.....2p

f surjectivă.....4p

Concluzie.....1p

3. Se verifică $|z+z'|^2+|z-z'|^2=2\left(|z|^2+|z'|^2\right)$, $\forall z,z'\in\mathbb{C}$ 3p

Se aplică relaţia de mai sus, pe rând, numerelor z_1 şi z_2 , z_2 şi z_3 respectiv z_3 şi z_1

Din $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$ şi $|z_2+z_3|^2+|z_2-z_3|^2=2\left(|z_2|^2+|z_3|^2\right)$, folosind ipoteza, se obtine $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|$. Analog $|z_1-z_2|=|z_3-z_1|$ 3p

Fie A,B,C imaginile geometrice asociate numerelor complexe z_1,z_2,z_3 distincte două câte două cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|\neq 0$

Se deduce că punctele A,B,C sunt situate pe un cerc având centrul în originea reperului cartezian şi raza $|z_1|>0$

Din $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$ rezultă $AB=BC=CA$, ceea ce arată că triunghiul ABC este echilateral.....1p

4. Se notează $\lg x=a,\lg y=b,\lg z=c$. Din $x,y,z>1\Rightarrow a,b,c>0$ 1p

Inegalitatea de demonstrat devine $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\geq 1$ (*) 1p

Notând $b+2c=A, c+2a=B, a+2b=C$ se arată că

$\frac{a}{b+2c}=\frac{1}{9}\left(\frac{C}{A}+4\frac{B}{A}-2\right), \frac{b}{c+2a}=\frac{1}{9}\left(\frac{A}{B}+4\frac{C}{B}-2\right), \frac{c}{a+2b}=\frac{1}{9}\left(\frac{B}{C}+4\frac{A}{C}-2\right)$ cu $A,B,C>0$ şi rămâne de demonstrat $\left(\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right)+\left(\frac{B}{C}+\frac{C}{B}\right)+\left(\frac{C}{A}+\frac{A}{C}\right)+3\left(\frac{A}{B}+\frac{B}{C}+\frac{C}{A}\right)-6\geq 9$ (**).....3p

Din inegalitatea mediilor rezultă
$\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\geq 2, \frac{B}{C}+\frac{C}{B}\geq 2, \frac{C}{A}+\frac{A}{C}\geq 2$ şi $\frac{A}{B}+\frac{B}{C}+\frac{C}{A}\geq 3$, ceea ce demostrează (**)...2p

Altfel, se aplică inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz:
$\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)\geq\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)^2, \forall x_i,y_i\in\mathbb{R}, i\in\{1,2,3\}$ ...1p

Notând $\sqrt{\frac{a}{b+2c}}=x_1; \sqrt{a(b+2c)}=y_1$, ...2p

Se obţine $\left(\sum\frac{a}{b+2c}\right)\left(\sum a(b+2c)\right)\geq\left(\sum a\right)^2$ 2p

şi rămâne de arătat că $\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\geq 1$. 2p